Tipo 32

Sea $\mathbb{R}_{\mathit{1}}\left[x\right]$ con $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

Hallar $q \in \mathbb{R}_{\mathit{1}}\left[x\right]$ tal que $p(\mathit{0}) = \langle p;q\rangle\ \ \forall p \in \mathbb{R}_{\mathit{1}}\left[x\right]$

El teorema de Riesz nos dicw que si $\phi:\ V \to \mathbb{K}$ es un operador lineal, entonces existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi(x) = \langle x;v\rangle\ \forall x \in \mathbb{V}$.

En nuestro caso: $\phi(p) = p(\mathit{0})$

buscamos $q(x) = a + bx$ tal que $p(\mathit{0}) = \langle p;q\rangle\ \forall p \in \mathbb{R}_{\mathit{1}}\left[x\right]$

en particular se debe cumplir para los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}_{\mathit{1}}\left[x\right]$

Entonces planteamos:

si $p(x) = \mathit{1}\ \ \longrightarrow\ 1 = \langle 1;a+bx\rangle = \int_{-1}^{1} 1.(a+bx)dx = ax + b\dfrac{x^2}{2}\ |_{-1}^{1} = 2a$

si $p(x) = x\ \ \longrightarrow\ 0 = \langle x;a+bx\rangle = \int_{-1}^{1} x.(a+bx)dx = a\dfrac{x^2}{2} + b\dfrac{x^3}{3}\ |_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}b$

O sea: $\begin{cases} 2a & = 1 \\ \dfrac{2}{3}b & = 0 \end{cases} \ \ \to a = \dfrac{1}{2} \quad b = 0$

Así, el polinomio q que buscamos es: $q(x) = \dfrac{1}{2}$

Considere en $\mathbb{R}^2$ el producto interno $<\mathrm{x};\mathrm{y}> = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ y los subespacios $\mathrm{S} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ y $\mathrm{W} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Hallar todos los vectores $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathrm{d}\left(\mathrm{v};\mathrm{S}\right) = \mathrm{d}\left(\mathrm{v};\mathrm{W}\right)$.

Observemos que $<\mathrm{x};\mathrm{y}> = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Tenemos que hallar vectores que cumplan: $\parallel \mathrm{P}_{\mathrm{S}^\perp}\left(\mathrm{v}\right) \parallel = \parallel \mathrm{P}_{\mathrm{W}^\perp}\left(\mathrm{v}\right) \parallel$

Calculamos los complementos ortogonales:

$\mathrm{S}^\perp$: buscamos $\left(\mathrm{x}\ \mathrm{y}\right)^{\mathrm{t}}$ tal que $<\left(\mathrm{x}\ \mathrm{y}\right);\left(1\ -1\right)> = 0$

$$(\mathrm{x\ y})\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = 6\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 0 \rightarrow \mathrm{y} = 3\mathrm{x} \quad \rightarrow \mathrm{S}^{\perp} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\right\}$$

Analogamente:

$$\mathrm{W}^{\perp} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

Así: $$\mathrm{P}_{\mathrm{S}^{\perp}}(\mathrm{v}) = \frac{<\mathrm{v}; \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \|^2}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{W}^{\perp}}(\mathrm{v}) = \frac{<\mathrm{v}; \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \|^2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\| \mathrm{P}_{\mathrm{S}^{\perp}}(\mathrm{v}) \| = \left|\frac{<\mathrm{v}; \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \|^2}\right| \| \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \| = \left|\frac{<v; \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \|}\right|$$

$$\| \mathrm{P}_{\mathrm{W}^{\perp}}(\mathrm{v}) \| = \left|\frac{<\mathrm{v}; \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \|^2}\right| \| \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \| = \left|\frac{<v; \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \|}\right|$$

Igualando:

$$\left|\frac{<v; \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \|}\right| = \left|\frac{<v; \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}>}{\| \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \|}\right|$$

Si $\mathrm{v} = (\mathrm{x\ y})^{\mathrm{t}}$ nos queda: $\left| \frac{2\mathrm{x} + 2\mathrm{y}}{2} \right| = \left| \frac{4\mathrm{x}}{\sqrt{8}} \right|$

La solución son dos rectas:

$y = \left(\sqrt{2} - 1\right) x$

$y = \left(-\sqrt{2} - 1\right) x$